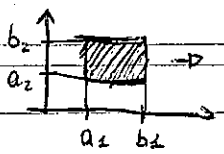
$\mathbb{R}^n$ → SPAZIO VETORIALE
→ SPAZIO FISICO
} 2 STRUTTURE DIVERSE

NUOVI CONCETTI: • SPAZIO TOPOLOGICO $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i, b_i\right)$



es: PRODOTTO CARTESIANO

SPAZIO METRICO (INTERVALLI APERTI)

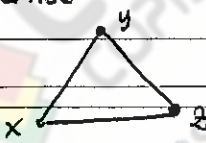
↳ FUNZIONE DISTANZA

DEF. La DISTANZA è $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (SPAZIO FISICO) $d(x,y) \geq 0$ [LA DISTANZA NON È MAI NEGATIVA]
e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ → LA DISTANZA È UNA FUNZIONE SIMMETRICA

(iii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$



UNA QUALSIASI FUNZIONE CHE SODDISFA QUESTE 3 PROPRIETÀ È UNA FUNZIONE DISTANZA E MI PERMETTE DI PARLARE DI SPAZIO METRICO
ciò che definisce lo spazio metrico è la FUNZIONE DISTANZA

ESEMPI:

(1) DISTANZA EUCLIDEA
• $d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ $\quad x = (x_1, \dots x_N)$ $\quad y = (y_1, \dots, y_N)$

(2) • $d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(3) • $d_\infty(x,y) := \max_{i=1,\dots n} \{|x_i - y_i|\}$

OSSERVAZIONE:
Se $n=1$, come si comportano le distanze? (su $\mathbb{R}$?)
CASO $n=1$: su $\mathbb{R}$ coincidono tutte e 3 le risposte, ovvero la distanza è la differenza dei 2 valori, la lunghezza del segmento o il valore assoluto di $x_i - y_i$. PER $n=1$ $d_1 = d_2 = d_\infty$

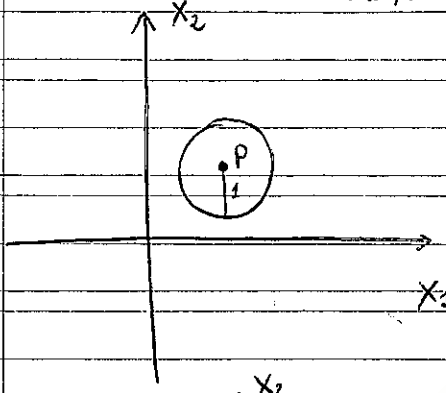
MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

se $m=2$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(x,P) = 1\} \longrightarrow$$ SI OTTIENE UNA CIRCONFERENZA

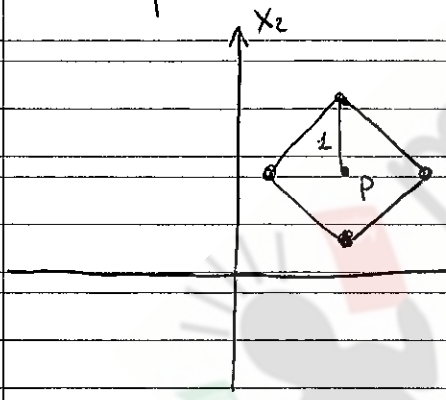
(P: PUNTO FISSO, DATO)



SE $d_2(x,P) = 1$ OTTENGO

dati $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $P = (P_1, P_2)$

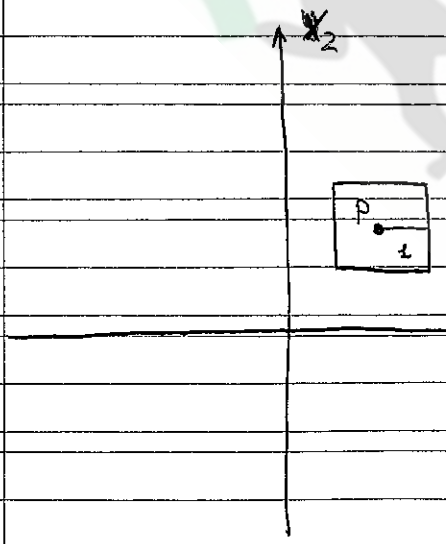
$$\sqrt{(x_1 - P_1)^2 + (x_2 - P_2)^2} = 1$$



SE

$$d_1(x,P) = 1 \Rightarrow |x_1 - P_1| + |x_2 - P_2| = 1$$

OTTENGO [QUADRATO DI DIAGONALE 2 E CENTRO IN P.]



SE

$$d_\infty(x,P) = 1$$

$$\max\{|x_1 - P_1| + |x_2 - P_2|\} = 1$$

OTTENGO [QUADRATO DI LATO 2 CENTRATO IN P.]

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Data una circonferenza, si trovano anche i quadrati di queste 2 forme, sia fuori che dentro la circonferenza.
Esistono delle costanti per cui valgono tutte queste disuguaglianze.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ↓

$$d_\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} d_2(x,y) \leq d_2(x,y) \leq 2 d_1(x,y) \leq 4 d_\infty(x,y)$$

↳ SONO TUTTE EQUIVALENTI (IN $\mathbb{R}^2$) A MENO DI UNA COSTANTE;
PER COMODITÀ SI SCEGLIE d_2 → DISTANZA EUCLIDEA

RICAPITOLANDO:
$\mathbb{R}^n$ → COME SPAZIO METRICO
↳ DOTATO DI UNA DISTANZA.
↳ 3 POSSIBILI DISTANZE; FAMIGLIA DI DISTANZE := $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (FAMIGLIA DI DISTANZE)

$1 \leq p < \infty$

POI CI SONO I CASI PARTICOLARI $p=1$, $p=2$, $p=\infty$

se $p=1 \rightarrow d_1$
se $p=2 \rightarrow d_2$
se $p=\infty \rightarrow d_\infty$

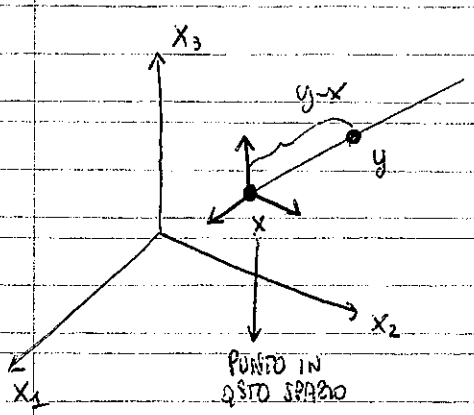
Su $\mathbb{R}^n$ in realtà, sono tutte equivalenti a meno di alcuni coefficienti.

$\exists\, a, b, c, d$

$$\frac{1}{a} d_\infty(x,y) \leq \frac{1}{b} d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c\, d_1(x,y) \leq k\, d_\infty(x,y)$$

CONSIDERIAMO QUESTA, LA DISTANZA EUCLIDEA

Es: $\mathbb{R}^3$



PUNTO y = PUNTO x + $(y-x)$

$y = x + (y-x)$ STRUTTURA DI SOMMA DI SPAZIO VETTORIALE

↓ VETTORE CHE MI DICE COME MUOVERMI DA x PER RAGGIUNGERE y

VETTORI CHE HANNO BASE NEL PUNTO CHE STO CONSIDERANDO

$\mathbb{R}^n$ SPAZIO FISICO DI BASE e tanti SPAZI VETTORIALI con base i PUNTI NELLO SPAZIO. (SOTTOSPAZI VETTORIALI DEGLI SPAZI)

↓ si userà per descrivere i concetti di convessità di vettori, di spazi tangenti, ecc

[redacted]

$\exists$ una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che si dice NORMA se: ($\mathbb{R}$; il VALORE ASSOLUTO)

↑

PROPRIETÀ

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ [MOLTO IMPORTANTE]

(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Esempi: FAMIGLIA DI NORME EQUIVALENTI TRA LORO

↳ EQUIVALENTI IN QSTO SENSO: $\exists\, a, b, c, K$ tali che:

$$\frac{1}{a}\|v\|_\infty \leq \frac{1}{b}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c\|v\|_1 \leq K\|v\|_\infty \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

↳ le costanti dipendono soltanto da $\mathbb{R}$

(1) NORMA EUCLIDEA $\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$ } [lunghezza euclidea di un vettore]

(2) NORMA 1 $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(3) NORMA ∞ $\quad \|v\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} \{|v_i|\}$

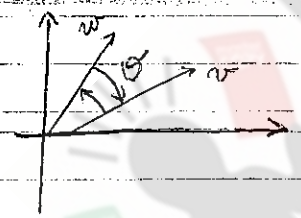
NB: $\sqrt{a^2+b^2} \neq |a| + |b|$
NORMA 2 NORMA 1

$d(x,y) = \|x-y\|$ → VETTORE
DISTANZA TRA x e y

essere una coppia di spazi vettoriali mi permette di ottenere una distanza

$d_{TRA}(x,y;0) = \|x-y\|$ → INVARIANTE PER TRASLAZIONE

SPAZIO CON PRODOTTO SCALARE



$\langle v, w \rangle$ → PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETORI NEL PIANO: $(\mathbb{R}^2)$

$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$

FUNZIONE PRODOTTO SCALARE $\langle \cdot, \cdot \rangle : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{\text{COPPIA}} \to \mathbb{R}$

SI DICE PRODOTTO SCALARE SE

(i) $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

(ii) FUNZIONE BILINEARE → lineare su entrambe le variabili, le combinate

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle$

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle \quad \forall v, w, u \in \mathbb{R}^n$

(iv) SIMMETRIA $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

OSSERVAZIONE

Il prodotto scalare può essere associato in maniera UNIVOCA a una matrice.